



Spis treści

Co znajdziesz w Vademecum?	5
Planer	8

1. Liczby rzeczywiste i wyrażenia algebraiczne

1.1. Liczby rzeczywiste. Działania w zbiorze liczb rzeczywistych	12
1.2. Potęgi. Działania na potęgach	14
1.3. Pierwiastki. Działania na pierwiastkach	17
1.4. Wyrażenia algebraiczne	18
1.5. Wzory skróconego mnożenia	20
1.6. Procenty	23
Podsumowanie 1	26
Zadania maturalne	28

2. Zbiory, wartość bezwzględna i nierówności

2.1. Zbiory, przedziały liczbowe	30
2.2. Równania i nierówności	33
2.3. Wartość bezwzględna	36
2.4. Równania i nierówności z wartością bezwzględną	38
Zadania maturalne	40

3. Funkcje

3.1. Pojęcie funkcji, dziedzina i zbiór wartości funkcji	42
3.2. Miejsca zerowe funkcji, punkty wspólne wykresu funkcji z osiami układu współrzędnych	47
3.3. Monotoniczność funkcji	49
3.4. Odczytywanie rozwiązań równań i nierówności z wykresu funkcji	51
3.5. Przekształcanie wykresu funkcji	52
Podsumowanie 3	54
Zadania maturalne	56

4. Funkcja liniowa

4.1. Wzór funkcji liniowej	58
4.2. Wykres funkcji liniowej	60
4.3. Monotoniczność funkcji liniowej	63
4.4. Wzajemne położenie prostych będących wykresami funkcji liniowych	64
4.5. Układy równań liniowych	66
4.6. Interpretacja geometryczna układu równań liniowych	69
4.7. Zastosowania funkcji liniowej	71
Podsumowanie 4	74
Zadania maturalne	76

5. Funkcja kwadratowa

5.1. Wzór funkcji kwadratowej, miejsca zerowe	78
5.2. Postaci ogólna, kanoniczna i iloczynowa funkcji kwadratowej	79
5.3. Wykres funkcji kwadratowej	81
5.4. Własności funkcji kwadratowej	84
5.5. Wartość najmniejsza i wartość największa funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym	86
5.6. Równania kwadratowe	87
5.7. Nierówności kwadratowe	89
5.8. Zastosowania funkcji kwadratowej	91
Podsumowanie 5	94
Zadania maturalne	96

6. Wielomiany

6.1. Wielomiany	98
6.2. Równania wielomianowe	102
Podsumowanie 6	103
Zadania maturalne	104

WZORY CKE

Kod:
F9NVYA

app.nowaterazmatura.pl

SPRAWDŹ AKTUALNOŚCI CKE

Kod:
SZVPEW

app.nowaterazmatura.pl

7. Funkcja wymierna

7.1. Funkcja wymierna postaci $f(x) = \frac{a}{x}$	106
7.2. Proporcjonalność odwrotna	108
7.3. Wyrażenia wymierne	110
Zadania maturalne	113

8. Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna

8.1. Funkcja wykładnicza	114
8.2. Logarytmy. Działania na logarytmach	118
8.3. Funkcja logarytmiczna	119
8.4. Zastosowania funkcji wykładniczej i funkcji logarytmicznej	122
Podsumowanie 8	124
Zadania maturalne	126

9. Trygonometria

9.1. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego	128
9.2. Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego	131
9.3. Związki między funkcjami trygonometrycznymi	134
Podsumowanie 9	136
Zadania maturalne	138

10. Ciągi

10.1. Ciągi liczbowe	140
10.2. Monotoniczność ciągu	142
10.3. Ciąg arytmetyczny	143
10.4. Ciąg geometryczny	146
10.5. Suma ciągu arytmetycznego i suma ciągu geometrycznego	150
Podsumowanie 10	154
Zadania maturalne	156

11. Planimetria

11.1. Kąty na płaszczyźnie	158
11.2. Twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie cosinusów	159
11.3. Figury przystające. Cechy przystawiania trójkątów	163
11.4. Twierdzenie Talesa. Podobieństwo figur	165
11.5. Symetrie. Wielokąty foremne	170
11.6. Okrąg i koło	175
11.7. Kąt środkowy i kąt wpisany	179
11.8. Okrąg opisany na trójkącie. Okrąg wpisany w trójkąt	181
11.9. Trójkąty	186

11.10. Czworokąty	191
11.11. Dowody geometryczne	195
Podsumowanie 11	198
Zadania maturalne	200

12. Geometria analityczna

12.1. Środek i długość odcinka	204
12.2. Równanie kierunkowe prostej	208
12.3. Wzajemne położenie prostych	210
12.4. Równanie ogólne prostej	213
12.5. Równanie okręgu	214
12.6. Symetria w układzie współrzędnych	216
Podsumowanie 12	220
Zadania maturalne	222

13. Stereometria

13.1. Proste i kąty w przestrzeni. Graniastosłupy	224
13.2. Ostrosłupy	228
13.3. Pola powierzchni i objętości graniastosłupów oraz ostrosłupów	232
13.4. Bryły obrotowe	236
13.5. Pola powierzchni i objętości brył obrotowych	239
13.6. Bryły podobne	241
Podsumowanie 13	244
Zadania maturalne	246

14. Rachunek prawdopodobieństwa

14.1. Reguła mnożenia, reguła dodawania	250
14.2. Doświadczenia losowe, zdarzenia elementarne	252
14.3. Prawdopodobieństwo klasyczne	253
Podsumowanie 14	256
Zadania maturalne	258

15. Statystyka

15.1. Średnia arytmetyczna, średnia ważona	260
15.2. Mediana, dominanta	262
Podsumowanie 15	264
Zadania maturalne	266
Odpowiedzi	270
Indeks	282
Wartości funkcji trygonometrycznych	286

Co znajdziesz w Vademecum?

Vademecum z matematyki na poziomie podstawowym z serii „NOWA Teraz matura” to kompendium wiedzy, które doskonale sprawdzi się podczas przygotowań do obowiązkowego egzaminu maturalnego. Z vademecum możesz uczyć się systematycznie: dokładnie powtarzać teorię, analizować przykładowo rozwiązane zadania, a następnie samodzielnie rozwiązywać analogiczne zadania oraz zestawy zadań w formie egzaminacyjnej. Dzięki quizom łatwiej odświeżysz wiadomości. Planer pozwoli ci zaplanować powtórki w odpowiednim czasie.

Poniżej przedstawiamy poszczególne elementy układu treści vademecum, a także stosowane w nim oznaczenia.



Na początku publikacji znajdziesz kod dostępu do aplikacji app.nowaterazmatura.pl. Zarejestruj się tam, aktywuj kod i korzystaj z zasobów cyfrowych do serii „NOWA Teraz matura”. Skanuj kody QR podczas pracy na urządzeniach mobilnych lub wpisz kody literowo-cyfrowe do aplikacji podczas pracy przy komputerze.

Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna	Trygonometria	Ciągi	Planimetria
GRUDZIEŃ		STYCZEŃ	

Planer maturalny to połączenie spisu treści vademecum z kalendarzem. Ułatwia samodzielne zaplanowanie powtórki całego materiału i motywuje do systematycznej pracy. Możesz w nim odhaczać zrealizowane tematy i odliczać czas pozostały do egzaminu.

5.6. Równania kwadratowe

Równaniem kwadratowym nazywamy równanie
Wyrażenie $\Delta = b^2 - 4ac$ to wyróżnik równania

Każdy dział jest podzielony na krótkie tematy, które zaczynają się od zwięzłego wstępu teoretycznego. Wyróżniliśmy go kolorowym tłem.



Oznaczenie *Quiz z teorii* na początku tematu to odsyłacz do quizu składającego się z kilku zadań testowych. Możesz go rozwiązać zamiast czytania teorii. Seria pytań skutecznie sprawdzi twoją wiedzę teoretyczną i ułatwi zapamiętanie podstawowych reguł i wzorów.

ZADANIA Z ROZWIĄZANIAMI

		$\Delta = b^2 - 4ac$				

Zadania z rozwiązaniami są dobrane tak, aby można było przeanalizować najbardziej **typowe zadania** z danego tematu. Ich rozwiązania są opatrzone komentarzami, które wyjaśniają konieczne założenia, poszczególne etapy rozwiązania czy wybór najlepszej metody.

Dopiski na marginesach przypominają w odpowiednich momentach kluczowe **definicje** i **wzory** matematyczne oraz zwracają uwagę na istotne kwestie.

ZADANIA

Zadania zamieszczone bezpośrednio pod *Zadaniami z rozwiązaniami* pozwalają sprawdzić, jak sobie radzisz z zadaniami analogicznymi do omówionych.

→ **Odpowiedzi**
s. 270

Odsyłacz do strony, na której znajdują się krótkie **odpowiedzi** do *Zadań*.

Kratka na marginesie zachęca do robienia własnych notatek, dzięki którym vademecum nabierze indywidualnego charakteru.

Podsumowanie 5

Podsumowania to wybrane informacje z poszczególnych działów przedstawione w formie plakatów, map myśli, schematów. Ułatwiają zapamiętywanie zależności bądź skojarzenie niektórych własności. Część informacji musisz uzupełnić samodzielnie.

Quiz z teorii



app.nowa
terazmatura.pl
Kod: KN3ANH

Oznaczenie *Quiz z teorii* umieszczone przy *Podsumowaniu* to odsyłacz do quizu, składającego się z kilkunastu zadań testowych dotyczących teorii z danego działu.

Film – rozwiązanie zadania



app.nowa
terazmatura.pl
Kod: 5MLURR

Rozwiązania filmowe do wybranych zagadnień z *Podsumowania* prezentują youtuberzy: MiedzianyFisor oraz Marcin, prowadzący kanał Matma z pasją.

Podsumowanie – uzupełnione odpowiedzi



app.nowa
terazmatura.pl
Kod: DN1NVQ

Kod QR umieszczony na zakończenie *Podsumowania* kieruje do pliku PDF z uzupełnionymi lukami. Komplet takich graficznych podsumowań możesz wydrukować i powiesić w pobliżu miejsca nauki.

Zadania maturalne

Zadania maturalne na końcu każdego działu to zadania skonstruowane na wzór zadań egzaminacyjnych CKE lub wybrane oryginalne zadania CKE.

**Wzory CKE
z wyszarzeniami**Kod: **PYR3FU**

app.nowaterazmatura.pl

Odnośnik do publikacji „Wybrane wzory matematyczne CKE z wyróżnionymi fragmentami dla zakresu podstawowego”. Znajdziesz w niej kopię książeczki CKE „Wybrane wzory matematyczne na egzamin maturalny z matematyki” z jedną różnicą. **Zostawiliśmy widoczne tylko te fragmenty, które dotyczą matury na poziomie podstawowym**, resztę wyszarzyliśmy. Dzięki temu łatwiej odnaleźć przydatne wzory.

Warto tę publikację wydrukować i zaglądać do niej systematycznie.

Wzory CKEKod: **F9NVYA**

app.nowaterazmatura.pl

Odnośnik do publikacji CKE „Wybrane wzory matematyczne na egzamin maturalny z matematyki”, z której można korzystać podczas egzaminu.

CKE maj 2025 PP

Oznaczenie zadania, które wystąpiło na maturze w poprzednich latach lub w materiałach CKE i pasuje także do obecnych wymagań egzaminacyjnych dla poziomu podstawowego.

Odpowiedzi

Dzięki krótkim odpowiedziom można **szybko sprawdzić** końcowy wynik każdego zadania.

**Rozwiązania
zadań**

nowa.terazmatura.pl

Kod: **HPL8B4**

Kody QR umieszczone w części *Odpowiedzi* kierują do plików PDF z pełnymi rozwiązaniami **wszystkich** zadań z vademecum.

Indeks

Indeks znajduje się na końcu publikacji. Umożliwia szybkie dotarcie do szukanego pojęcia lub zagadnienia.

**Więcej –
Zbiór zadań
maturalnych PP**

Aby nabrać biegłości w rozwiązywaniu zadań maturalnych, warto sięgnąć po zbiór zadań maturalnych z matematyki na poziomie podstawowym z serii „NOWA Teraz matura”. Układy treści vademecum i zbioru zadań maturalnych są ze sobą ściśle skorelowane.

**Więcej –
Arkusze
maturalne PP**

Osiągnięcie najwyższej formy przed egzaminem zapewnią arkusze maturalne z matematyki na poziomie podstawowym z serii „NOWA Teraz matura”. Pracę z arkuszami polecamy na zakończenie przygotowań do matury, gdy całość powtórzenia masz już za sobą.

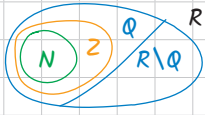
1. Liczby rzeczywiste i wyrażenia algebraiczne

Quiz z teorii



Kod: C2NHXU

app.nowaterazmatura.pl



1.1. Liczby rzeczywiste. Działania w zbiorze liczb rzeczywistych

Zbiór liczb rzeczywistych \mathbb{R}

W zbiorze liczb rzeczywistych \mathbb{R} wyróżniamy:

- zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$,
- zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$,
- zbiór liczb wymiernych \mathbb{Q} , czyli takich, które można przedstawić w postaci ułamka zwykłego $\frac{k}{m}$, gdzie k i m są liczbami całkowitymi ($m \neq 0$),
przykłady liczb wymiernych: $\frac{101}{1795}$, $\sqrt{9}$, $(\sqrt{2})^2$, $0,(37)$;
rozwiniecie dziesiętne liczby wymiernej jest skończone albo nieskończone okresowe,
- zbiór liczb niewymiernych, czyli takich, które nie są liczbami wymiernymi,
przykłady liczb niewymiernych: $\sqrt{3}$, $2 + \sqrt{5}$, π ;
rozwiniecie dziesiętne liczby niewymiernej jest nieskończone i nieokresowe.

Prawa wykonywania działań

Niech a , b , c będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

Prawo przemienności	
dodawania	mnożenia
$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$

Prawo łączności	
dodawania	mnożenia
$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$	$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Prawo rozdzielności mnożenia względem	
dodawania	odejmowania
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

Prawo rozdzielności dzielenia ($c \neq 0$) względem	
dodawania	odejmowania
$(a + b) : c = a : c + b : c$	$(a - b) : c = a : c - b : c$

Kolejność wykonywania działań

1. Działania w nawiasach
2. Potęgowanie i pierwiastkowanie
3. Mnożenie i dzielenie (zgodnie z kolejnością występowania)
4. Dodawanie i odejmowanie (zgodnie z kolejnością występowania)

ZADANIA Z ROZWIĄZANIAMI

1. Oblicz $(2\frac{1}{2} + 0,9 : \sqrt{0,36})^2 \cdot 3\frac{3}{4} - 3$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} (2\frac{1}{2} + 0,9 : \sqrt{0,36})^2 \cdot 3\frac{3}{4} - 3 &= \\ = (2\frac{1}{2} + 0,9 : 0,6)^2 \cdot 3\frac{3}{4} - 3 &= \\ = (2\frac{1}{2} + \frac{3}{2})^2 \cdot 3\frac{3}{4} - 3 &= 4^2 \cdot 3\frac{3}{4} - 3 = \\ = 16 \cdot 3\frac{3}{4} - 3 &= 60 - 3 = 57 \end{aligned}$$

Wykonujemy najpierw działania w nawiasie, a spośród nich – najpierw pierwiastkowanie, potem dzielenie i na końcu dodawanie.

Po wykonaniu działań w nawiasie najpierw wykonujemy potęgowanie, potem mnożenie i na końcu odejmowanie.

2. Wyznacz liczbę przeciwną do odwrotności liczby $a = 0,(6) - \frac{5}{12} + 0,375$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} a &= 0,(6) - \frac{5}{12} + 0,375 = \\ &= \frac{6}{9} - \frac{5}{12} + \frac{375}{1000} = \\ &= \frac{2}{3} - \frac{5}{12} + \frac{3}{8} = \\ &= \frac{16-10+9}{24} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

Zamieniamy ułamek okresowy 0,(6) na ułamek zwykły:

$$\begin{aligned} x &= 0,(6) \\ 10x &= 6,(6) \\ 10x &= 6 + 0,(6) \\ 10x &= 6 + x \\ 9x &= 6 \\ x &= \frac{6}{9} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{5}{8}} = \frac{8}{5}$$

Odwrotnością liczby $a \neq 0$ jest liczba $\frac{1}{a}$.

$$-\frac{1}{a} = -\frac{8}{5} = -1\frac{3}{5}$$

Liczbą przeciwną do liczby t jest liczba $-t$.

Odp. Liczba przeciwna do odwrotności liczby a jest równa $-1\frac{3}{5}$.

3. Udowodnij, że jeżeli suma dwóch kolejnych liczb naturalnych dzieli się przez 3, to iloczyn tych liczb nie dzieli się przez 3.

Rozwiązanie

Dwie kolejne liczby naturalne mogą być: $3k$ i $3k+1$ lub $3k+1$ i $3k+2$, lub $3k+2$ i $3(k+1)$, gdzie $k \in \mathbb{N}$.

Zapisujemy kolejne liczby w taki sposób, aby można było sprawdzić, czy są podzielne przez 3.

Sumy tych liczb są równe odpowiednio:

$$\begin{aligned} 3k + 3k + 1 &= 6k + 1 = 3 \cdot (2k) + 1 \\ 3k + 1 + 3k + 2 &= 6k + 3 = 3(2k + 1) \\ 3k + 2 + 3(k + 1) &= 3k + 2 + 3k + 3 = \\ &= 6k + 5 = 6k + 3 + 2 = 3(2k + 1) + 2 \end{aligned}$$

Tylko druga suma jest podzielna przez 3, gdyż można ją zapisać jako iloczyn liczby 3 i liczby naturalnej $2k+1$. Pierwsza suma przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1, a trzecia suma – resztę 2.

Tylko suma liczb $3k+1$ i $3k+2$ jest podzielna przez 3.

$$\begin{aligned} (3k + 1) \cdot (3k + 2) &= 9k^2 + 9k + 2 = \\ &= 3(3k^2 + 3k) + 2 + (3k^2 + k) \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Obliczamy iloczyn liczb, których suma jest podzielna przez 3.

Reszta z dzielenia tego iloczynu przez 3 jest równa 2, więc ten iloczyn nie dzieli się przez 3.

To kończy dowód.

ZADANIA

1. Oblicz $(8\frac{1}{3} - 0,5 \cdot \sqrt{256})^2 : \frac{1}{90} + 3$.

2. Wyznacz liczbę odwrotną do liczby $a = 0,(8) - \frac{7}{18} + 0,75$.

3. Udowodnij, że jeżeli iloczyn dwóch kolejnych liczb naturalnych dzieli się przez 3, to suma tych liczb nie dzieli się przez 3.

Quiz z teorii



Kod: H93Z59

app.nowaterazmatura.pl

1.2. Potęgi. Działania na potęgach

Potęga o wykładniku całkowitym

Dla dowolnej liczby a i liczby naturalnej $n > 1$: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$

Ponadto przyjmujemy:

$$a^0 = 1 \text{ dla } a \neq 0 \text{ oraz } a^1 = a.$$

Dla dowolnej liczby $a \neq 0$ i dowolnej liczby naturalnej $k \geq 1$: $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$

W szczególności dla $a \neq 0$ i $b \neq 0$: $a^{-1} = \frac{1}{a}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-k} = \left(\frac{b}{a}\right)^k$

Działania na potęgach o wykładnikach całkowitych

Dla dowolnych liczb $a \neq 0$ i $b \neq 0$ oraz liczb całkowitych n i k :

$$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$$

$$a^n : a^k = a^{n-k}$$

$$(a^n)^k = a^{n \cdot k}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Potęga o wykładniku wymiernym

Dla dowolnej liczby $a \geq 0$ i liczby naturalnej $n > 1$: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

Dla dowolnej liczby $a > 0$, liczby naturalnej $n > 1$ i liczby całkowitej k : $a^{\frac{k}{n}} = (\sqrt[n]{a})^k$

Działania na potęgach o wykładnikach wymiernych

Dla dodatnich liczb rzeczywistych a i b oraz dowolnych liczb wymiernych w i t :

$$a^w \cdot a^t = a^{w+t}$$

$$a^w : a^t = a^{w-t}$$

$$(a^w)^t = a^{w \cdot t}$$

$$a^w \cdot b^w = (a \cdot b)^w$$

$$\frac{a^w}{b^w} = \left(\frac{a}{b}\right)^w$$

Monotoniczność potęgowania

Dla dodatniej liczby rzeczywistej a oraz dowolnych liczb wymiernych t i w zachodzą zależności:

- jeśli $t < w$, $0 < a < 1$, to $a^t > a^w$,
- jeśli $t < w$, $a > 1$, to $a^t < a^w$.

ZADANIA Z ROZWIĄZANIAMI

1. Oblicz $\frac{(5-3)^2 \cdot (5^3)^{-4}}{5 \cdot 5^{-16}}$.

Rozwiązanie

$$\frac{(5-3)^2 \cdot (5^3)^{-4}}{5 \cdot 5^{-16}} =$$

$$= \frac{5^{-3} \cdot 2 \cdot 5^3 \cdot (-4)}{5 \cdot 5^{-16}} = \leftarrow \text{W liczniku korzystamy dwukrotnie ze wzoru } (a^n)^k = a^{n \cdot k}.$$

$$= \frac{5^{-6} \cdot 5^{-12}}{5^1 \cdot 5^{-16}} = \leftarrow \text{Korzystamy z faktu, że } a = a^1.$$

$$= \frac{5^{-6+(-12)}}{5^{1+(-16)}} = \leftarrow \text{W liczniku i mianowniku korzystamy ze wzoru } a^n \cdot a^k = a^{n+k}.$$

$$= \frac{5^{-18}}{5^{-15}} = 5^{-18-(-15)} = \leftarrow \text{Korzystamy ze wzoru } \frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}.$$

$$= 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} \leftarrow \text{Korzystamy ze wzoru } a^{-k} = \frac{1}{a^k}.$$

2. Oblicz $\frac{2,5^{4,5} \cdot 2,5^{-3}}{0,4^{-0,5} \cdot 0,4^{-\frac{3}{4}}} \cdot 6,4^{\frac{1}{4}}$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} \frac{2,5^{4,5} \cdot 2,5^{-3}}{0,4^{-0,5} \cdot 0,4^{-\frac{3}{4}}} \cdot 6,4^{\frac{1}{4}} &= \frac{2,5^{4,5-3}}{0,4^{-0,5-\frac{3}{4}}} \cdot 6,4^{\frac{1}{4}} = \leftarrow \text{W liczniku i mianowniku korzystamy ze wzoru } a^w \cdot a^t = a^{w+t}. \\ &= \frac{2,5^{1,5}}{0,4^{-\frac{5}{4}}} \cdot 6,4^{\frac{1}{4}} = \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^{1,5}}{\left(\frac{2}{5}\right)^{-\frac{5}{4}}} \cdot 6,4^{\frac{1}{4}} = \\ &= \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^{1,5}}{\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{4}}} \cdot 6,4^{\frac{1}{4}} = \leftarrow \text{Korzystamy ze wzoru } \left(\frac{a}{b}\right)^{-k} = \left(\frac{b}{a}\right)^k. \\ &= \left(\frac{5}{2}\right)^{1,5-\frac{5}{4}} \cdot 6,4^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot 6,4^{\frac{1}{4}} = \leftarrow \text{Korzystamy ze wzoru } \frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}. \\ &= \left(\frac{5}{2} \cdot 6,4\right)^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1}{4}} = \leftarrow \text{Korzystamy ze wzoru } a^w \cdot b^w = (a \cdot b)^w. \\ &= \sqrt[4]{16} = 2 \leftarrow \text{Korzystamy ze wzoru } a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}. \end{aligned}$$

3. Zapisz wyrażenie $\frac{(a^{-5} \cdot a^2) : a^3}{(a^7)^2 \cdot a^{-3}}$ w postaci potęgi o podstawie a . Przyjmij, że $a \neq 0$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} \frac{(a^{-5} \cdot a^2) : a^3}{(a^7)^2 \cdot a^{-3}} &= \frac{a^{-3} : a^3}{a^{14} \cdot a^{-3}} = \leftarrow \text{W liczniku korzystamy ze wzoru } a^n \cdot a^k = a^{n+k}, \text{ a w mianowniku - ze wzoru } (a^n)^k = a^{n \cdot k}. \\ &= \frac{a^{-6}}{a^{11}} = a^{-17} \leftarrow \text{W liczniku korzystamy ze wzoru } a^n : a^k = a^{n-k}, \text{ a w mianowniku - ze wzoru } a^n \cdot a^k = a^{n+k}. \end{aligned}$$

4. Zapisz $\frac{4^{12} \cdot 16^4}{2^{32}}$ w postaci potęgi liczby:

a) 2,

b) 4,

c) 16.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{4^{12} \cdot 16^4}{2^{32}} &= \frac{(2^2)^{12} \cdot (2^4)^4}{2^{32}} = \frac{2^{24} \cdot 2^{16}}{2^{32}} = \frac{2^{40}}{2^{32}} = 2^8 \leftarrow \text{Zapisujemy liczby 4 i 16 jako potęgi liczby 2 i korzystamy z działań na potęgach.} \\ \text{b) } \frac{4^{12} \cdot 16^4}{2^{32}} &= \frac{4^{12} \cdot (2^4)^4}{(2^2)^{16}} = \frac{4^{12} \cdot 4^8}{4^{16}} = \frac{4^{20}}{4^{16}} = 4^4 \leftarrow \text{Zapisujemy: } 2^{32} = 2^{2 \cdot 16} = (2^2)^{16} \text{ oraz korzystamy z działań na potęgach.} \\ \text{c) } \frac{4^{12} \cdot 16^4}{2^{32}} &= \frac{(2^2)^6 \cdot 16^4}{(2^4)^8} = \frac{16^6 \cdot 16^4}{16^8} = \frac{16^{10}}{16^8} = 16^2 \leftarrow \text{Zapisujemy: } 2^{32} = 2^{4 \cdot 8} = (2^4)^8 \text{ i } 4^{12} = 4^{2 \cdot 6} = (4^2)^6 \text{ oraz korzystamy z działań na potęgach.} \end{aligned}$$

5. Wartość wyrażenia $\frac{(4^9 + 4^{10}) \cdot (5^{12} + 5^{13})}{2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}}$ jest liczbą naturalną. Ile cyfr ma zapis dziesiętny tej liczby?

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} \frac{(4^9 + 4^{10}) \cdot (5^{12} + 5^{13})}{2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}} &= \\ &= \frac{(4^9 + 4^1 \cdot 4^9) \cdot (5^{12} + 5^1 \cdot 5^{12})}{2^7 + 2^1 \cdot 2^7 + 2^2 \cdot 2^7 + 2^3 \cdot 2^7} = \leftarrow \text{W liczniku i mianowniku korzystamy ze wzoru } a^n + a^k = a^n \cdot a^k. \\ &= \frac{4^9 \cdot (1 + 4) \cdot 5^{12} \cdot (1 + 5)}{2^7 \cdot (1 + 2 + 4 + 8)} = \leftarrow \text{W liczniku z każdego z wyrażeń w nawiasach wyłączamy wspólny czynnik. Również w mianowniku wyłączamy wspólny czynnik przed nawias.} \\ &= \frac{4^9 \cdot 5 \cdot 5^{12} \cdot 6}{2^7 \cdot 15} = \frac{(2^2)^9 \cdot 5^{12} \cdot 3 \cdot 2^2}{2^7 \cdot 3 \cdot 5} = \leftarrow \text{Liczbę 4 zapisujemy jako potęgę liczby 2.} \\ &= \frac{2^{18} \cdot 5^{12} \cdot 2^1}{2^7 \cdot 5} = \frac{2^{19} \cdot 5^{12}}{2^7 \cdot 5} = \leftarrow \text{Korzystamy ze wzorów } (a^n)^k = a^{n \cdot k} \text{ oraz } a^n \cdot a^k = a^{n+k}. \\ &= 2^{12} \cdot 5^{12} = (2 \cdot 5)^{12} = 10^{12} \leftarrow \text{Korzystamy ze wzoru } a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n. \\ \text{Odp. Zapis dziesiętny tej liczby ma 13 cyfr.} &\leftarrow \text{Zapis dziesiętny liczby } 10^{12} \text{ to jedynka i 12 zer, czyli ma 13 cyfr.} \end{aligned}$$

1.3. Pierwiastki. Działania na pierwiastkach

Pierwiastki

Dla parzystej liczby naturalnej $n > 1$ oraz $a \geq 0$ i $b \geq 0$: $\sqrt[n]{a} = b$, gdy $b^n = a$

Dla nieparzystej liczby naturalnej $n > 1$ oraz $a, b \in \mathbb{R}$: $\sqrt[n]{a} = b$, gdy $b^n = a$

Działania na pierwiastkach

Dla liczby naturalnej $n > 1$ i liczby naturalnej k :

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \text{ gdy } b \neq 0$$

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$$

Dla parzystej liczby naturalnej n dodatkowo zakładamy, że $a \geq 0$ i $b \geq 0$.

Dla liczby naturalnej $n > 1$: $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{dla } n \text{ nieparzystego} \\ |a| & \text{dla } n \text{ parzystego} \end{cases}$

Quiz z teorii



Kod: Q796S1

app.nowaterazmatura.pl

ZADANIA Z ROZWIĄZANIAMI

1. Oblicz $\frac{\sqrt[3]{0,8} \cdot \sqrt[3]{-80}}{\sqrt[4]{0,1} \cdot \sqrt[4]{0,001}}$.

Rozwiązanie

$$\frac{\sqrt[3]{0,8} \cdot \sqrt[3]{-80}}{\sqrt[4]{0,1} \cdot \sqrt[4]{0,001}} = \frac{\sqrt[3]{0,8 \cdot (-80)}}{\sqrt[4]{0,1 \cdot 0,001}} = \frac{\sqrt[3]{-64}}{\sqrt[4]{0,0001}} = \frac{-4}{0,1} = -40$$

W liczniku i mianowniku korzystamy ze wzoru $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$.

2. Włącz czynnik pod pierwiastek w wyrażeniu $-1,5 \cdot \sqrt[3]{4\frac{4}{9}}$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} -1,5 \cdot \sqrt[3]{4\frac{4}{9}} &= \sqrt[3]{(-1,5)^3 \cdot \sqrt[3]{\frac{40}{9}}} = \sqrt[3]{(-\frac{3}{2})^3 \cdot \frac{40}{9}} = \sqrt[3]{-\frac{27}{8} \cdot \frac{40}{9}} = \sqrt[3]{-15} \end{aligned}$$

Korzystamy z zależności $a = \sqrt[3]{a^3}$.

Korzystamy ze wzoru $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$.

3. Wyłącz czynnik przed pierwiastek w wyrażeniu $\sqrt[5]{96}$.

Rozwiązanie

$$\sqrt[5]{96} = \sqrt[5]{32 \cdot 3} = \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{3} = 2\sqrt[5]{3}$$

Liczbę pod pierwiastkiem rozkładamy na iloczyn dwóch czynników, z których jeden jest piątą potęgą liczby naturalnej. Następnie korzystamy ze wzoru $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

ZADANIA

1. Oblicz.

a) $\sqrt[3]{-6,4} : \sqrt[3]{0,1}$

b) $\sqrt[4]{16^8}$

c) $\sqrt[7]{\frac{2}{9}} \cdot \sqrt[7]{4,5}$

d) $\sqrt{10 \cdot \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{3}{5}}}$

2. Włącz czynnik pod pierwiastek.

a) $6\sqrt{2}$

b) $\frac{1}{6} \cdot \sqrt[3]{432}$

c) $10 \cdot \sqrt[5]{0,0001}$

3. Wyłącz czynnik przed pierwiastek.

a) $\sqrt[3]{300}$

b) $\sqrt[4]{160}$

c) $\sqrt[5]{-288}$

→ Odpowiedzi
s. 270

Quiz z teorii



Kod: L6RYK6

app.nowaterazmatura.pl

1.4. Wyrażenia algebraiczne

Wyrażenie algebraiczne to wyrażenie składające się z liczb (stałych) i liter (zmiennych) połączonych znakami działań arytmetycznych oraz nawiasami.

np. $4x^2 + 6$, $\sqrt{x^2 + 1} - x$, $\frac{x-1}{x+1}$, $5(x^2 + 4x - 6)$

Jednomian to wyrażenie, które jest liczbą, literą lub iloczynem liczby i liter.

np. -8 , x , $4x^2z^4$

Dwa jednomiany są **podobne**, gdy występują w nich te same litery w tych samych potęgach.

np. $4x^2y$ i $-0,9x^2y$, $8p^4r^5$ i $\frac{1}{3}p^4r^5$

Jednomiany podobne możemy dodawać i odejmować. Tę czynność nazywamy **redukcją wyrazów podobnych**.

Suma algebraiczna to skończona suma jednomianów.

Podstawowe przekształcenia algebraiczne:

- dodawanie jednomianów, np. $6x + 7x = 13x$
- mnożenie jednomianów, np. $6x \cdot 7x = 42x^2$
- redukcja wyrazów podobnych, np. $3x + 2y + 8x - 5y + 6 = 11x - 3y + 6$
- mnożenie sum algebraicznych
np. $6x \cdot (8x^2y - 2x + 7) = 48x^3y - 12x^2 + 42x$
 $(4x + 3y)(2x - 5y + 6) = 4x \cdot 2x + 4x \cdot (-5y) + 4x \cdot 6 + 3y \cdot 2x + 3y \cdot (-5y) + 3y \cdot 6 =$
 $= 8x^2 - 15y^2 - 14xy + 24x + 18y$
- wyłączanie czynnika poza nawias, np. $72x^2y + 48xy^2 - 8xy = 8xy \cdot (9x + 6y - 1)$

ZADANIA Z ROZWIĄZANAMI

1. Wykonaj działania.

a) $-x - 3y - 2xy - (6x + 3y - 5xy)$

b) $-\frac{2}{3}xy(6x^2 - 1,5y + 9)$

c) $(3x + y)(2x^2 + xy - y^2)$

Rozwiązanie

a) $-x - 3y - 2xy - (6x + 3y - 5xy) =$

$= -x - 3y - 2xy - 6x - 3y + 5xy =$

$= -x - 6x - 3y - 3y - 2xy + 5xy =$

$= -7x - 6y + 3xy$

Opuszczamy nawias, przed którym jest znak minus, więc zmieniamy znaki składników sumy na przeciwne.

Redukujemy wyrazy podobne.

b) $-\frac{2}{3}xy(6x^2 - 1,5y + 9) =$

$= -\frac{2}{3}xy \cdot 6x^2 - \frac{2}{3}xy \cdot (-1,5y) - \frac{2}{3}xy \cdot 9 =$

$= -4x^3y + xy^2 - 6xy$

Mnożymy jednomian przez każdy składnik sumy i dodajemy iloczyny.

c) $(3x + y)(2x^2 + xy - y^2) =$

$= 3x \cdot 2x^2 + 3x \cdot xy + 3x \cdot (-y^2) +$

$+ y \cdot 2x^2 + y \cdot xy + y \cdot (-y^2) =$

$= 6x^3 + 3x^2y - 3xy^2 + 2x^2y + xy^2 - y^3 =$

$= 6x^3 + 5x^2y - 2xy^2 - y^3$

Mnożymy każdy składnik drugiej sumy przez $3x$ oraz mnożymy każdy składnik drugiej sumy przez y .

Redukujemy wyrazy podobne.

2. Wyłącz czynnik poza nawias.

a) $3x^5 + 6x^3 - 12x + 15$

b) $45a^2c^3 - 18ac^4 + 54a^3c^2$

Rozwiązanie

a) $3x^5 + 6x^3 - 12x + 15 =$
 $= 3(x^5 + 2x^3 - 4x + 5)$

Wspólnym czynnikiem jest liczba 3, ponieważ
 $3x^5 + 6x^3 - 12x + 15 = 3 \cdot x^5 + 3 \cdot 2x^3 - 3 \cdot 4x + 3 \cdot 5.$

b) $45a^2c^3 - 18ac^4 + 54a^3c^2 =$
 $= 9ac^2 \cdot 5ac - 9ac^2 \cdot 2c^2 + 9ac^2 \cdot 6a^2 =$
 $= 9ac^2(5ac - 2c^2 + 6a^2)$

Wspólnym czynnikiem jest $9ac^2$.

3. Prostokąt o bokach długości $x^2 + 2$ i $x^2 + 4x + 6$ oraz kwadrat mają równe obwody. Podaj wyrażenie opisujące długość boku kwadratu.

Rozwiązanie

Obwód prostokąta:

$2(x^2 + 2) + 2(x^2 + 4x + 6) =$
 $= 2x^2 + 4 + 2x^2 + 8x + 12 =$
 $= 4x^2 + 8x + 16$

Zapisujemy wyrażenie opisujące obwód prostokąta i przekształcamy je do najprostszej postaci.

Obwód kwadratu: $4a$

$4a = 4x^2 + 8x + 16$

Kwadrat i prostokąt mają równe obwody.

$a = x^2 + 2x + 4$

Wyznaczamy długość boku kwadratu.

Odp. $x^2 + 2x + 4$

4. Udowodnij, że jeśli do liczby czterocyfrowej niepodzielnej przez 10 dodamy liczbę zapisaną tymi samymi cyframi, ale w odwrotnej kolejności, to otrzymana suma będzie podzielna przez 11.

Rozwiązanie

$1000x + 100y + 10z + t, x \neq 0, t \neq 0$

Zapisujemy liczbę czterocyfrową niepodzielną przez 10.

$1000t + 100z + 10y + x, x \neq 0, t \neq 0$

Zapisujemy liczbę, która ma takie same cyfry jak wyjściowa liczba, ale w odwrotnej kolejności.

$1000x + 100y + 10z + t + 1000t + 100z + 10y + x =$

Zapisujemy sumę liczb.

$= 1001x + 110y + 110z + 1001t =$

$= 11 \cdot 91x + 11 \cdot 10x + 11 \cdot 10x + 11 \cdot 91x =$

Współczynniki liczbowe zapisujemy jako iloczyny liczby 11 i liczby naturalnej.

$= 11 \cdot \underbrace{(91x + 10y + 10z + 91t)}_{\in \mathbb{N}}$

Wyłączamy 11 przed nawias. W nawiasie otrzymujemy wyrażenie, którego wartość jest liczbą naturalną.

To kończy dowód.

ZADANIA

1. Wykonaj działania.

a) $4m - 5k + 6km - (2km + k - m)$

c) $(\sqrt{2} - 3)(\sqrt{8} + 4\sqrt{2})$

b) $-6,5x \cdot (10x^2 - 20x + 30)$

d) $(x\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + x)$

2. Wyłącz czynnik poza nawias.

a) $2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 32$

b) $24c^2p^3 - 48c^4p^2 - 30c^3p^4$

3. Równoległobok o bokach długości $x^2 + 3$ i $x^2 + 2x + 5$ oraz romb mają równe obwody. Podaj wyrażenie opisujące długość boku rombu.

4. Udowodnij, że jeśli od liczby trzycyfrowej niepodzielnej przez 10 odejmiemy liczbę zapisaną tymi samymi cyframi, ale w odwrotnej kolejności, to otrzymana różnica będzie podzielna przez 9.

Quiz z teorii



Kod: J5EBWN

app.nowaterazmatura.pl

1.5. Wzory skróconego mnożenia

Wzory skróconego mnożenia

Kwadrat sumy dwóch wyrażeń: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Kwadrat różnicy dwóch wyrażeń: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Różnica kwadratów dwóch wyrażeń: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Usuwanie niewymierności z mianownika

Aby usunąć niewymierność z mianownika ułamka, mnożymy jego licznik i mianownik przez odpowiednio dobrane wyrażenie. W takiej sytuacji często przydaje się wzór na różnicę kwadratów.

ZADANIA Z ROZWIĄZANAMI

1. Zapisz wyrażenie w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x + 5y)^2$ b) $(6x - \frac{1}{2}y)^2$ c) $(\sqrt{5} - k)(\sqrt{5} + k)$ d) $(-2m - 7t)^2$

Rozwiązanie

a) $(x + 5y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5y + (5y)^2 =$ ← Korzystamy ze wzoru na kwadrat sumy.
 $= x^2 + 10xy + 25y^2$

b) $(6x - \frac{1}{2}y)^2 = (6x)^2 - 2 \cdot 6x \cdot \frac{1}{2}y + (\frac{1}{2}y)^2 =$ ← Korzystamy ze wzoru na kwadrat różnicy.
 $= 36x^2 - 6xy + \frac{1}{4}y^2$

c) $(\sqrt{5} - k)(\sqrt{5} + k) = (\sqrt{5})^2 - k^2 = 5 - k^2$ ← Korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów.

d) $(-2m - 7t)^2 = [-(2m + 7t)]^2 = (2m + 7t)^2 =$ ← Wyłączamy -1 przed nawias, a następnie korzystamy ze wzoru na kwadrat sumy.
 $= (2m)^2 + 2 \cdot 2m \cdot 7t + (7t)^2 =$
 $= 4m^2 + 28mt + 49t^2$

2. Oblicz.

a) $(\sqrt{2} + \sqrt{7})^2$ b) $(\sqrt{10} - \sqrt{5})^2$ c) $(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2})(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2})$

Rozwiązanie

a) $(\sqrt{2} + \sqrt{7})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{7} + (\sqrt{7})^2 =$ ← Korzystamy ze wzoru na kwadrat sumy.
 $= 2 + 2\sqrt{14} + 7 = 9 + 2\sqrt{14}$

b) $(\sqrt{10} - \sqrt{5})^2 = (\sqrt{10})^2 - 2 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 =$ ← Korzystamy ze wzoru na kwadrat różnicy.
 $= 10 - 2\sqrt{50} + 5 = 15 - 2\sqrt{25 \cdot 2} =$
 $= 15 - 10\sqrt{2}$

c) $(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2})(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2}) = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - (\sqrt{2})^2 =$ ← Korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów.
 $= \frac{3}{4} - 2 = -1\frac{1}{4}$

3. Przedstaw wyrażenie w postaci iloczynu dwóch sum algebraicznych.

a) $9k^2 + 30kt + 25t^2$ b) $64 - 32x + 4x^2$ c) $100a^2 - 0,01d^2$

Rozwiązanie

a) $9k^2 + 30kt + 25t^2 =$
 $= (3k)^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot k \cdot t + (5t)^2 = (3k + 5t)^2$

$$\begin{aligned} \text{b) } 64 - 32x + 4x^2 &= \\ &= 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 2x + (2x)^2 = (8 - 2x)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 100a^2 - 0,01d^2 &= (10a)^2 - (0,1d)^2 = \\ &= (10a + 0,1d)(10a - 0,1d) \end{aligned}$$

4. Przekształć wyrażenie do najprostszej postaci.

$$\text{a) } (4x - 3)^2 - (3x - 4)^2$$

$$\text{b) } ((x - y)^2 + 2xy)(x + y)(x - y)$$

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} \text{a) } (4x - 3)^2 - (3x - 4)^2 &= \text{Korzystamy ze wzoru na kwadrat różnicy.} \\ &= (4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 3 + 3^2 - ((3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 4 + 4^2) = \text{Opuszczamy nawias, przed którym} \\ &= 16x^2 - 24x + 9 - (9x^2 - 24x + 16) = \text{jest znak minus, więc zmieniamy} \\ &= 16x^2 - 24x + 9 - 9x^2 + 24x - 16 = \text{znaki składników sumy na przeciwne.} \\ &= 7x^2 - 7 \text{ Redukujemy wyrazy podobne.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } ((x - y)^2 + 2xy)(x + y)(x - y) &= \text{Korzystamy ze wzoru na kwadrat różnicy oraz ze wzoru} \\ &= (x^2 - 2xy + y^2 + 2xy)(x^2 - y^2) = \text{(a + b)(a - b) = a}^2 - \text{b}^2. \\ &= (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = \text{W pierwszym nawiasie redukujemy wyrazy podobne.} \\ &= (x^2)^2 - (y^2)^2 = \text{Korzystamy ze wzoru (a + b)(a - b) = a}^2 - \text{b}^2. \\ &= x^4 - y^4 \end{aligned}$$

5. Usuń niewymierność z mianownika ułamka $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} &= \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \text{Rozszerzamy ułamek, mnożąc licznik i mianownik przez } \sqrt{3}-1. \\ &= \frac{(\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 + 1^2}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \text{W liczniku korzystamy ze wzoru (a - b)}^2 = \text{a}^2 - 2\text{ab} + \text{b}^2, \\ &= \frac{4 - 2\sqrt{3}}{3 - 1} = \frac{2(2 - \sqrt{3})}{2} = 2 - \sqrt{3} \text{ W liczniku wyłączamy 2 przed nawias i skracamy ułamek.} \end{aligned}$$

6. Wykaż, że jeśli dla liczb rzeczywistych w, x, y, z zachodzi równość

$$(x - w)^2 + (y - z)^2 = (x + z)^2 + (y + w)^2, \text{ to } x + y = 0 \text{ lub } w + z = 0.$$

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} (x - w)^2 + (y - z)^2 &= (x + z)^2 + (y + w)^2 \\ x^2 - 2xw + w^2 + y^2 - 2yz + z^2 &= x^2 + 2xz + z^2 + y^2 + 2yw + w^2 \\ x^2 - 2xw + w^2 + y^2 - 2yz + z^2 - x^2 - 2xz - z^2 - y^2 - 2yw - w^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$-2xw - 2yz - 2xz - 2yw = 0 \quad | : (-2)$$

$$xw + yz + xz + yw = 0$$

$$(xw + xz) + (yw + yz) = 0$$

$$x(w + z) + y(w + z) = 0 \quad \text{Grupujemy składniki i wyłączamy czynniki przed nawias.}$$

$$(x + y)(w + z) = 0$$

$$x + y = 0 \text{ lub } w + z = 0 \quad \text{Iloczyn jest równy 0, gdy co najmniej jeden z czynników} \\ \text{jest równy 0.}$$

To kończy dowód.

7. Liczba n przy dzieleniu przez 8 daje resztę 3. Wykaż, że liczba o 1 mniejsza od kwadratu liczby n jest podzielna przez 8.

Rozwiązanie

$$n = 8k + 3, \text{ gdzie } k \in \mathbb{N}$$

Zapisz liczbę, która przy dzieleniu przez 8 daje resztę 3.

$$\begin{aligned} n^2 - 1 &= (8k + 3)^2 - 1 = (8k)^2 + 2 \cdot 8k \cdot 3 + 3^2 - 1 = \\ &= 64k^2 + 48k + 8 = 8(8k^2 + 6k + 1) \end{aligned}$$

Korzystamy ze wzoru na kwadrat sumy.

Redukujemy wyrazy podobne. Wyłączamy 8 przed nawias.

Wartość wyrażenia w nawiasie jest liczbą naturalną, czyli liczba $n^2 - 1$ jest podzielna przez 8.

To kończy dowód.

8. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ liczba $(3n + 5)^2 - (3n^2 + 5^2)$ jest podzielna przez 12.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} (3n + 5)^2 - (3n^2 + 5^2) &= \\ &= (3n)^2 + 2 \cdot 3n \cdot 5 + 5^2 - 3n^2 - 25 = \\ &= 9n^2 + 30n + 25 - 3n^2 - 25 = \\ &= 6n^2 + 30n = 6n(n + 5) \end{aligned}$$

Korzystamy ze wzoru na kwadrat sumy oraz opuszczamy drugi nawias.

Wyłączamy $6n$ przed nawias.

Liczba $6n(n + 5)$ jest podzielna przez 6.

Jeśli n jest liczbą parzystą, to $n(n + 5)$ jest liczbą parzystą, jeśli zaś n jest liczbą nieparzystą, to $n + 5$ jest liczbą parzystą i wtedy także $n(n + 5)$ jest liczbą parzystą. Stąd $n(n + 5)$ jest liczbą parzystą dla każdego $n \geq 1$.

Iloczyn liczby parzystej i dowolnej liczby jest liczbą parzystą.

Suma dwóch liczb nieparzystych jest liczbą parzystą.

Zatem liczba $6n(n + 5)$ jest podzielna przez $6 \cdot 2 = 12$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. To kończy dowód.

→ Odpowiedzi
s. 270

ZADANIA

- Zapisz wyrażenie w postaci sumy algebraicznej.
 - $(a + 7c)^2$
 - $(\frac{3}{4}k - \frac{4}{3}m)^2$
 - $(1 - 0,2m)(1 + 0,2m)$
 - $(3 + x)^2 + (4 - x)^2$
- Oblicz.
 - $(\frac{1}{2} + 2\sqrt{2})^2$
 - $(6\sqrt{6} - 3\sqrt{3})^2$
 - $(5\sqrt{2} - \sqrt{5})(5\sqrt{2} + \sqrt{5})$
- Przedstaw wyrażenie w postaci iloczynu dwóch sum algebraicznych.
 - $9a^2 + 24az + 16z^2$
 - $49y^2 - 14y + 1$
 - $36p^2 - 144r^2$
- Przekształć wyrażenie do najprostszej postaci.
 - $(2x - 5)^2 - (5x - 2)^2$
 - $(a + b)(a - b)(2ab - (a + 2)^2)$
- Usuń niewymierność z mianownika.
 - $\frac{4}{\sqrt{6} - 1}$
 - $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} + 5}$
 - $\frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$
 - $\frac{8 - \sqrt{8}}{8 + \sqrt{8}}$
- Wykaż, że jeśli dla liczb rzeczywistych k, m, p, r zachodzi równość $(k + m)^2 + (p - r)^2 = (k + p)^2 + (m - r)^2$, to $m = p$ lub $k = -r$.
- Liczba n przy dzieleniu przez 8 daje resztę 5. Wykaż, że liczba o 1 mniejsza od kwadratu liczby n jest podzielna przez 8.
- Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ liczba $(5n + 3)^2 - (3^2 - 5n^2)$ jest podzielna przez 60.

1.6. Procenty

1 procent (1%) to setna część całości, **1 promil (1‰)** to tysięczna część całości.

$$p\% \text{ liczby } x \text{ to } \frac{p}{100} \cdot x$$

$$p\text{‰} \text{ liczby } x \text{ to } \frac{p}{1000} \cdot x$$

$$1\% = 10\text{‰}$$

Punkt procentowy to jednostka, w której wyraża się różnicę między dwiema wartościami procentowymi tej samej wielkości.

Procent składany to sposób oprocentowania kapitału (np. lokaty bankowej) polegający na tym, że dochód w postaci odsetek osiągnięty w danym okresie rozliczeniowym jest doliczany do kapitału (czyli kapitalizowany) w następnym okresie rozliczeniowym.

Kapitalizacja roczna:

$$K_n = K \cdot (1 + p)^n$$

Kapitalizacja w równych odstępach krótszych niż rok:

$$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{m}\right)^{m \cdot n}$$

K_n – wartość kapitału po n latach

K – początkowa wartość kapitału (lokaty)

p – roczna stopa procentowa (np. dla oprocentowania 6% w skali roku $p = 0,06$)

m – liczba okresów kapitalizacji w ciągu roku

n – liczba lat

W naszych obliczeniach pomijamy podatek od dochodów.

ZADANIA Z ROZWIĄZANIAM I

1. Oblicz:

- 2,5% liczby 18 000,
- jakim procentem liczby 75 jest liczba 30,
- liczbę, której 7% jest równe 56.

Rozwiązanie

a) $\frac{2,5}{100} \cdot 18\,000 = 450$

b) $\frac{30}{75} \cdot 100\% = 40\%$ ← Obliczamy, jaką częścią liczby 75 jest liczba 30, a następnie zamieniamy ułamek na procent.

c) x – szukana liczba
 $0,07x = 56 \quad | : 0,07$ ← Układamy odpowiednie równanie i je rozwiązujemy.
 $x = 800$

2. Cenę telefonu obniżono o 10%, a po pewnym czasie – jeszcze o 20%. Oblicz:

- o ile procent cena telefonu po dwóch obniżkach jest niższa od początkowej ceny,
- o ile procent należałoby podnieść cenę telefonu po obu obniżkach, aby wrócić do ceny początkowej.

Rozwiązanie

a) Początkowa cena telefonu: t

Kwota pierwszej obniżki: $0,1t$

Cena po pierwszej obniżce: $t - 0,1t = 0,9t$

Kwota drugiej obniżki: $0,2 \cdot 0,9t = 0,18t$

Cena po drugiej obniżce: $0,9t - 0,18t = 0,72t$

Różnica między ceną początkową a ceną po obniżkach: $t - 0,72t = 0,28t$ ← Obliczamy różnicę cen.

Odp. Po dwóch obniżkach cena telefonu jest o 28% niższa od początkowej ceny.

Quiz z teorii



Kod: 1GM7DA

app.nowaterazmatura.pl

b) p – liczba procent podwyżki ceny

$$0,72t + \frac{p}{100} \cdot 0,72t = t \quad \leftarrow \text{Układamy równanie i je rozwiązujemy.}$$

$$\frac{p}{100} \cdot 0,72t = 0,28t \quad | \cdot 100$$

$$p \cdot 0,72t = 28t \quad | : 0,72t$$

$$p = \frac{28t}{0,72t}$$

$$p = 38\frac{8}{9}$$

Odp. Obniżoną cenę należałoby podnieść o $38\frac{8}{9}\%$.

3. Dwa ośrodki badania opinii publicznej niezależnie od siebie zbadały, jaki procent mieszkańców Pomidorowa popiera swojego burmistrza. Ośrodek A stwierdził, że jest to 63%, a ośrodek B – że 75%. O ile punktów procentowych różnią się wyniki przedstawione przez te ośrodki?

Rozwiązanie

Obie wartości procentowe odnoszą się do tej samej wielkości.

$$75 - 63 = 12$$

Obliczamy różnicę między wartościami procentowymi, gdyż obie liczby odnoszą się do tej samej populacji.

Odp. Wyniki przedstawione przez te ośrodki różnią się o 12 punktów procentowych.

4. Oblicz wartość kapitału uzyskaną po 5 latach od złożenia 20 000 zł na lokatę oprocentowaną 6,5% w skali roku, jeśli wiadomo, że odsetki były kapitalizowane co roku.

Rozwiązanie

$$K = 20\,000 \text{ zł}$$

$$p = 0,065$$

$$n = 5$$

$$K_5 = 20\,000 \cdot (1 + 0,065)^5 \approx$$

$$\approx 27\,401,73 \text{ [zł]}$$

Wypisujemy dane.

Korzystamy ze wzoru na procent składany.

Odp. Po 5 latach na lokacie będzie 27 401,73 zł.

5. Pani Joanna wpłaciła 15 000 zł na lokatę trzyletnią oprocentowaną w wysokości 4,5% w skali roku. Odsetki są kapitalizowane co kwartał. Jaka kwotę będzie miała pani Joanna po upływie trzech lat?

Rozwiązanie

$$K = 15\,000 \text{ zł}$$

$$p = 0,045$$

$$n = 3$$

$$m = 4$$

$$K_3 = 15\,000 \cdot \left(1 + \frac{0,045}{4}\right)^{4 \cdot 3} =$$

$$= 15\,000 \cdot (1,01125)^{12} \approx$$

$$\approx 17\,155,12 \text{ [zł]}$$

Wypisujemy dane.

Kapitalizacja następuje co kwartał, czyli 4 razy w roku.

Korzystamy ze wzoru na procent składany przy kapitalizacji w okresach krótszych niż rok.

Odp. Po 3 latach na lokacie będzie 17 155,12 zł.

6. Pan Jerzy zaciągnął w banku kredyt w wysokości 17 500 zł, który będzie spłacał w czterech rocznych ratach równej wysokości. Oprocentowanie roczne tego kredytu to 16%. Oblicz wysokość jednej raty.

Rozwiązanie

x – wysokość rocznej raty

Kwota do spłaty po wypłaceniu kredytu:

$$17\,500 + 0,16 \cdot 17\,500 = 1,16 \cdot 17\,500 \text{ [zł]}$$

← W dniu wypłaty kredytu pan Jerzy jest zobowiązany spłacić 17 500 zł i roczne odsetki od tej kwoty.

Kwota do spłaty po zapłaceniu pierwszej raty:

$$(1,16 \cdot 17\,500 - x) \cdot 1,16 \text{ [zł]}$$

← Po zapłaceniu pierwszej raty pozostaje zobowiązanie do spłaty w wysokości $1,16 \cdot 17\,500 - x$ oraz 16% tej kwoty tytułem odsetek.

Kwota do spłaty po zapłaceniu drugiej raty:

$$((1,16 \cdot 17\,500 - x) \cdot 1,16 - x) \cdot 1,16 \text{ [zł]}$$

Kwota do spłaty po zapłaceniu trzeciej raty:

$$(((1,16 \cdot 17\,500 - x) \cdot 1,16 - x) \cdot 1,16 - x) \cdot 1,16 \text{ [zł]}$$

Po zapłaceniu ostatniej raty kredyt zostanie spłacony:

$$(((1,16 \cdot 17\,500 - x) \cdot 1,16 - x) \cdot 1,16 - x) \cdot 1,16 - x = 0$$

$$1,16^4 \cdot 17\,500 - 1,16^3 \cdot x - 1,16^2 \cdot x - 1,16^1 \cdot x - x = 0$$

$$1,16^4 \cdot 17\,500 = 1,16^3 \cdot x + 1,16^2 \cdot x + 1,16^1 \cdot x + x$$

$$1,16^4 \cdot 17\,500 = (1,16^3 + 1,16^2 + 1,16^1 + 1) \cdot x$$

← Wyciągamy x poza nawias.

$$1,16^4 \cdot 17\,500 = 1 \cdot \frac{1 - 1,16^4}{1 - 1,16} \cdot x$$

← Korzystamy ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego $S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$ dla $a_1 = 1$, $q = 1,16$, $n = 4$.

$$x = \frac{1,16^4 \cdot 17\,500 \cdot (1 - 1,16)}{1 - 1,16^4} \approx 6254,06 \text{ [zł]}$$

Odp. Wysokość jednej raty wynosi 6254,06 zł.

ZADANIA

- Oblicz:
 - 125% liczby 8,
 - jakim procentem liczby 125 jest liczba 80,
 - liczbę, której 2,5% jest równe 125.
- Cenę hulajnogi obniżono o 20%, a po pewnym czasie – jeszcze o 25%. Oblicz:
 - o ile procent cena hulajnogi po dwóch obniżkach jest niższa od początkowej ceny,
 - o ile procent należałoby podnieść cenę hulajnogi po obu obniżkach, aby wrócić do ceny początkowej.
- Za rozwiązanie pewnego testu można było otrzymać 50 punktów. Wojtek zdobył 20 punktów, a Jurek – 30 punktów.
 - O ile procent wynik Jurka był wyższy od wyniku Wojtka?
 - O ile punktów procentowych różnią się wyniki Jurka i Wojtka?
- Pan Wojciech wpłacił 11 000 zł na lokatę dwuletnią oprocentowaną w wysokości 4,25% w skali roku z roczną kapitalizacją odsetek. Ile będzie równa kwota na lokacie pana Wojciecha po dwóch latach?
- Pan Jerzy wpłacił kwotę 12 000 zł na czteroletnią lokatę oprocentowaną w wysokości 3,2% w skali roku. Odsetki są kapitalizowane co pół roku. O ile złotych większy będzie stan konta tej lokaty po upływie czterech lat?
- Bank udzielił pani Katarzynie kredytu w wysokości 16 000 zł z oprocentowaniem rocznym 12,5%, który będzie spłacany w trzech równych rocznych ratach. Oblicz łączną kwotę, jaką wpłaci do banku pani Katarzyna, spłacając ten kredyt.

→ Odpowiedzi
s. 270

Podsumowanie 1

Quiz z teorii



app.nowa
terazmatura.pl
Kod: NM48H3

Film – rozwiązanie zadania



app.nowa
terazmatura.pl
Kod: NHHTB6

1. Jak zamienić ułamek dziesiętny na ułamek zwykły?

$$0,3(7) = ?$$

$$0,3(7) = 0,3 + \underbrace{0,0(7)}_x$$

$$x = 0,0(7)$$

$$10x = 0,(7) = 0,7(7)$$

$$10x = 0,7 + x$$

$$9x = 0,7$$

$$x = \frac{7}{90}$$

$$0,3(7) = \frac{3}{10} + \frac{7}{90} = \frac{27}{90} + \frac{7}{90} = \frac{34}{90} = \frac{17}{45}$$

$$0,(1) = \frac{1}{9}$$

$$0,(2) = \frac{2}{9}$$

$$0,(3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$0,(4) = \frac{4}{9}$$

$$0,(5) = \frac{5}{9}$$

$$0,(6) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$0,(7) = \frac{7}{9}$$

$$0,(8) = \frac{8}{9}$$

$$0,(9) = \frac{9}{9} = 1$$

2. Wymierna czy niewymierna?

Czy suma liczb **niewymiernych** może być liczbą **wymierną**?

TAK NIE

$$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$$

Czy suma liczb **niewymiernych** może być liczbą **niewymierną**?

TAK NIE

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Czy różnica liczb **niewymiernych** może być liczbą **wymierną**?

TAK NIE

$$5\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 0$$

Czy różnica liczb **niewymiernych** może być liczbą **niewymierną**?

TAK NIE

$$5\sqrt{2} - \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

Czy iloczyn liczb **niewymiernych** może być liczbą **wymierną**?

TAK NIE

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

Czy iloczyn liczb **niewymiernych** może być liczbą **niewymierną**?

TAK NIE

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$$

Czy iloraz liczb **niewymiernych** może być liczbą **wymierną**?

TAK NIE

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

Czy iloraz liczb **niewymiernych** może być liczbą **niewymierną**?

TAK NIE

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

3. Uzupełnij zapisy związane z podzielnością liczb ($k \in \mathbb{Z}$).

$n = 2k$ zapis liczby podzielnej przez 2, czyli zapis liczby parzystej

$n = 3k$ zapis liczby podzielnej przez 3

$n = 10k$ zapis liczby podzielnej przez 10

$n = \dots k$ zapis liczby podzielnej przez 13

$n = mk$ zapis liczby podzielnej przez m

$n = 2k + 1$ zapis liczby, która przy dzieleniu przez 2 daje resztę 1, czyli zapis liczby nieparzystej

$n = 3k + 1$ zapis liczby, która przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1

$n = 10k + 4$ zapis liczby, która przy dzieleniu przez 10 daje resztę 4

$n = 17k + 10$ zapis liczby, która przy dzieleniu przez daje resztę

$n = mk + 1$ zapis liczby, która przy dzieleniu przez m daje resztę 1

$k + (k + 1)$ suma dwóch kolejnych liczb całkowitych

$2k + (2k + 2)$ suma dwóch kolejnych liczb parzystych

$(2k + 1) + (2k + 3)$ suma dwóch kolejnych liczb

$(3k - 3) + 3k + (3k + 3) =$
 $= 3(k - 1) + 3k + 3(k + 1)$ suma trzech kolejnych liczb całkowitych podzielnych przez

4. Udowodnij, że suma kwadratów dwóch kolejnych liczb całkowitych podzielnych przez 3 jest podzielna przez 9.

Aby wykazać, że dana liczba jest podzielna przez 9, wystarczy zapisać ją w postaci:

$$9 \cdot \text{liczba całkowita}$$

Oznaczmy: k – liczba całkowita

$3k, 3k + 3$ – dwie kolejne liczby podzielne przez 3

$(3k)^2 + (3k + 3)^2$ – suma kwadratów dwóch kolejnych liczb całkowitych podzielnych przez 3

Dowód: $(3k)^2 + (3k + 3)^2 = 9k^2 + 9k^2 + 18k + 9 = 9(2k^2 + 2k + 1)$

liczba całkowita

(Liczba k jest całkowita, zatem liczby $2k^2$ i $2k$ są całkowite, a suma liczb całkowitych jest **liczbą całkowitą**).

Liczbę $(3k)^2 + (3k + 3)^2$ zapisaaliśmy w postaci iloczynu liczby 9 oraz liczby całkowitej, zatem jest ona podzielna przez 9.

Film –
rozwiązanie
zadania



app.nowa
terazmatura.pl
Kod: 1HFECQ

Film –
rozwiązanie
zadania



app.nowa
terazmatura.pl
Kod: 4CTVSW

Podsumowanie –
uzupełnione
odpowiedzi



app.nowa
terazmatura.pl
Kod: CBX8K5

Zadania maturalne

→ Odpowiedzi
s. 270Wzory CKE
z wyszarzeniami

Kod: PYR3FU

app.nowaterazmatura.pl

Zadanie 1 (0–1)

CKE maj 2021 PP

Różnica $0,(3) - \frac{23}{33}$ jest równa

- A. $-0,(39)$ B. $-\frac{39}{100}$ C. $-0,36$ D. $-\frac{4}{11}$

Zadanie 2 (0–1)

CKE Informator 2024 PP

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia $2024 : (1 - \frac{1}{2025}) - (1 - \frac{2025}{2024}) : \frac{1}{2024}$ jest równa

- A. 0 B. 1 C. 2024 D. 2026

Zadanie 3 (0–1)

CKE maj 2020 PP

Liczba $\frac{2^{50} \cdot 3^{40}}{36^{10}}$ jest równa

- A. 6^{70} B. 6^{45} C. $2^{30} \cdot 3^{20}$ D. $2^{10} \cdot 3^{20}$

Zadanie 4 (0–1)

Dane jest wyrażenie $w = -(-a)^{-2}$. Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Wartość wyrażenia w dla $a = -(-2)^{-2}$ jest ujemna.	P	F
Wartości wyrażenia w dla liczb -6 i 6 są liczbami przeciwnymi.	P	F

Zadanie 5 (0–1)

Czy $\sqrt{0,35} + \sqrt{0,63} > 1$? Zaznacz odpowiedź A albo B i jej uzasadnienie spośród 1., 2. albo 3.

A	Tak,	ponieważ	1.	$\sqrt{0,35} + \sqrt{0,63} = \sqrt{0,98} < 1$
B	Nie,		2.	$\sqrt{0,35} < 0,6$ i $\sqrt{0,63} < 0,8$
		3.	$\sqrt{0,35} > \frac{1}{2}$ i $\sqrt{0,63} > \frac{1}{2}$	

Zadanie 6 (0–1)

Niech $a + \sqrt{10} = 0$. Która z podanych nierówności jest prawdziwa?

- A. $(a + 5)(a + 4) < 0$ B. $(a + 4)(a + 3) < 0$ C. $(a + 3)(a + 2) < 0$ D. $(a + 2)(a + 1) < 0$

Zadanie 7 (0–1)

CKE maj 2025 PP

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\frac{5^{12} + 5^{13} + 5^{14}}{5^{12}}$ jest równa

- A. 30 B. 31 C. 5^{12} D. 5^{27}

Zadanie 8 (0–1)

CKE maj 2022 PP

Dodatnie liczby x i y spełniają warunek $2x = 3y$. Wynika stąd, że wartość wyrażenia $\frac{x^2 + y^2}{x \cdot y}$ jest równa

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{13}{6}$ C. $\frac{6}{13}$ D. $\frac{3}{2}$

Zadanie 9 (0-1)

Które z podanych wyrażeń należy dodać do $(3x - 2y)^2$, aby otrzymać $(2x + 3y)^2$?

- A. $5y^2 - 5x^2 + 24xy$ B. $y - x$ C. $5y^2 - 5x^2$ D. $13x^2 + 13y^2$

Zadanie 10 (0-1)

Pani Katarzyna wpłaciła 10 000 zł na lokatę dwuletnią z roczną kapitalizacją odsetek. Po dwóch latach kwota na lokacie pani Katarzyny była równa 10 712,25 zł. Ile wynosiła roczna stopa procentowa?

- A. 3,5% B. 4% C. 4,5% D. 5%

Zadanie 11 (0-2)

Wskaż dwie liczby, które są większe od 1, ale mniejsze od 2.

- A. $\sqrt{\frac{16}{36}}$ C. $7,5 : (4,5 - 1\frac{1}{2})$ E. $\frac{1}{0,4}$ G. $\frac{11}{6} \cdot \frac{10}{7} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{10}$
 B. $0,8^2$ D. $\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{6}$ F. $\sqrt{(-3)^{-4}}$ H. $(\sqrt[3]{27})^2 - (\sqrt{4})^3$

Zadanie 12 (0-2)

Dane jest wyrażenie $xy(4 - x) - 4y$. Udowodnij, że jeśli y jest liczbą ujemną, to dla dowolnej wartości x wyrażenie to nie przyjmuje wartości ujemnej.

Zadanie 13 (0-2)

CKE maj 2022 PP

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej a i każdej liczby rzeczywistej b takich, że $b \neq a$, spełniona jest nierówność $\frac{a^2 + b^2}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

Zadanie 14 (0-2)

CKE maj 2023 PP

Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ liczba $(2n + 1)^2 - 1$ jest podzielna przez 8.

Zadanie 15 (0-2)

CKE maj 2024 PP

Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ liczba $n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2$ przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2.

Zadanie 16 (0-2)

Udowodnij, że wartość wyrażenia $(\sqrt{2}k - 1)^2 + (\sqrt{2}k + 1)^2$ dla k będącego liczbą całkowitą jest naturalną liczbą parzystą niepodzielną przez 4.

Zadanie 17 (0-2)

Cenę roweru obniżano trzykrotnie – za każdym razem o 20%. Wykaż, że końcowa cena tego roweru jest wyższa od połowy jego początkowej ceny.

Zadanie 18 (0-2)

Pan Jerzy podczas zakładania lokaty wręczył kasjerowi w banku plik banknotów 100-złotowych. Lokata była oprocentowana w wysokości 2,4% w skali roku, a kapitalizacja odbywała się co kwartał. Czas trwania lokaty to 3 lata. Po upływie tego okresu doliczone zostały należne odsetki i wówczas stan lokaty wynosił 8058,18 zł. Jaka kwotę wpłacił do banku pan Jerzy, zakładając lokatę?

Odpowiedzi

1. Liczby rzeczywiste i wyrażenia algebraiczne

ZADANIA

1.1. 1. 13

2. $\frac{4}{5}$

1.2. 1. $\frac{1}{25}$

2. $\frac{4}{5}$

3. a^{40}

4. a) 5^{36} b) 25^{18}

5. 10

7. $y < z < x < w$

1.3. 1. a) -4 b) 256 c) 1 d) 2

2. a) $\sqrt{72}$ b) $\sqrt[3]{2}$ c) $\sqrt[5]{10}$

3. a) $10\sqrt{3}$ b) $2^4\sqrt[4]{10}$ c) $-2^5\sqrt[5]{9}$

1.4. 1. a) $-6k + 5m + 4km$ b) $-65x^3 + 130x^2 - 195x$ c) $12 - 18\sqrt{2}$ d) $\sqrt{3}x^2 + x - 2\sqrt{3}$

2. a) $2(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$ b) $6c^2p^2(4p - 8c^2 - 5cp^2)$

3. $x^2 + x + 4$

1.5. 1. a) $a^2 + 14ac + 49c^2$ b) $\frac{9}{16}k^2 - 2km + \frac{16}{9}m^2$ c) $1 - 0,04m^2$ d) $2x^2 - 2x + 25$

2. a) $8\frac{1}{4} + 2\sqrt{2}$ b) $243 - 108\sqrt{2}$ c) 45

3. a) $(3a + 4z)^2$ b) $(7y - 1)^2$ c) $(6p + 12r)(6p - 12r)$

4. a) $21 - 21x^2$ b) $b^4 - a^4$

5. a) $\frac{4\sqrt{6} + 4}{5}$ b) $\frac{5\sqrt{3} - \sqrt{6}}{23}$ c) $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ d) $\frac{9 - 4\sqrt{2}}{7}$

1.6. 1. a) 10 b) 64% c) 5000

2. a) o 40% b) o $66\frac{2}{3}\%$

3. a) o 50% b) o 20 punktów procentowych

4. 11 954,87 zł

5. o 1624,82 zł

6. 20 156,67 zł

Zadania maturalne

1. D 2. D 3. C 4. PF 5. A3 6. B 7. B 8. B 9. A 10. A 11. DG 18. 7500 zł

Rozwiązania
zadań



app.nowa
terazmatura.pl
Kod: 2G6TTA

Rozwiązania
zadań
maturalnych



app.nowa
terazmatura.pl
Kod: 9V8DYY

Potęgi i pierwiastki

- Dla dowolnej liczby a i liczby naturalnej $n \geq 1$:
$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$$
- Dla dowolnej liczby $a \neq 0$ i dowolnej liczby naturalnej $k \geq 1$: $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$
- Dla parzystej naturalnej liczby $n > 1$ oraz $a \geq 0$ i $b \geq 0$:
 $\sqrt[n]{a} = b$, gdy $b^n = a$
- Dla nieparzystej liczby naturalnej $n > 1$ oraz dowolnych liczb a, b : $\sqrt[n]{a} = b$, gdy $b^n = a$
- Dla dowolnej liczby $a \geq 0$ i liczby naturalnej $n > 1$: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
- Ponadto dla liczby $a > 0$ i liczby całkowitej k :

$$a^{\frac{k}{n}} = (\sqrt[n]{a})^k$$

$$a^{-\frac{k}{n}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^k}$$

- Dla dodatnich liczb rzeczywistych a, b oraz dowolnych liczb w, t :

$$a^w \cdot a^t = a^{w+t}$$

$$a^w : a^t = a^{w-t}$$

$$a^w \cdot b^w = (a \cdot b)^w$$

$$\frac{a^w}{b^w} = \left(\frac{a}{b}\right)^w$$

$$(a^w)^t = a^{w \cdot t}$$

Logarytmy

- Dla $b > 0, a > 0, a \neq 1$: $\log_a b = c$, gdy $a^c = b$
- Dla dodatnich liczb a, b, c ($a \neq 1$) oraz dowolnej liczby $r \in \mathbb{R}$:
 $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
 $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
 $\log_a b^r = r \log_a b$
 $a^{\log_a b} = b$
- Dla $a > 0, a \neq 1$: $\log_a a = 1, \log_a 1 = 0$
- $\log_{10} b$ można zapisać jako $\log b$ lub $\lg b$

Wzory skróconego mnożenia

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Monotoniczność ciągu

Jeśli dla każdego $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

- $a_{n+1} > a_n$, to ciąg (a_n) jest rosnący,
- $a_{n+1} \geq a_n$, to ciąg (a_n) jest niemalejący,
- $a_{n+1} < a_n$, to ciąg (a_n) jest malejący,
- $a_{n+1} \leq a_n$, to ciąg (a_n) jest nierosnący,
- $a_{n+1} = a_n$, to ciąg (a_n) jest stały.

Ciąg arytmetyczny

(a_n) – ciąg arytmetyczny o różnicy r

- $a_{n+1} = a_n + r$
- Wzór ogólny na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego:
 $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$
- $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ dla $n \geq 2$
- Suma $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) :
 $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$
- Sumę można obliczyć także ze wzoru:
 $S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot r}{2} \cdot n$

Ciąg geometryczny

(a_n) – ciąg geometryczny o ilorazie q

- $a_{n+1} = a_n \cdot q$
- Wzór ogólny na n -ty wyraz ciągu geometrycznego:
 $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
- $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$ dla $n \geq 2$
- Suma $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) :
 $S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$, gdy $q \neq 1$
 $S_n = n \cdot a_1$, gdy $q = 1$

Równanie prostej

- Prosta, która nie jest równoległa do osi y , ma równanie:
 $y = ax + b$
- Liczba a to współczynnik kierunkowy prostej: $a = \tan \alpha$, gdzie α to kąt, który tworzy prosta z osią x .
- Współczynnik b wyznacza na osi y punkt, w którym dana prosta ją przecina.
- Równanie prostej, która przechodzi przez punkty $A = (x_1, y_1)$ i $B = (x_2, y_2)$: $(y - y_1)(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)(x - x_1) = 0$.
- Równanie kierunkowe prostej o współczynniku kierunkowym a , która przechodzi przez punkt $A = (x_1, y_1)$:
 $y = a(x - x_1) + y_1$

Równoległość prostych

- Proste o równaniach $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są równoległe wtedy, gdy $a_1 = a_2$.
- Proste $x = c_1$ i $x = c_2$ są równoległe dla dowolnych wartości c_1 i c_2 .

Prostopadłość prostych

- Proste o równaniach $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są prostopadłe wtedy, gdy $a_1 \cdot a_2 = -1$, czyli gdy $a_2 = -\frac{1}{a_1}$.
- Proste $y = a$ i $x = c$ są prostopadłe dla dowolnych wartości a i c .

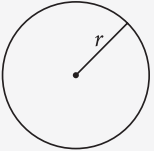
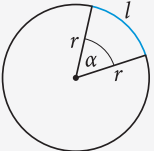
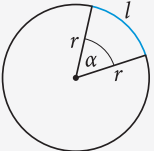
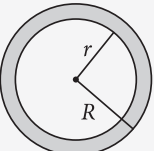
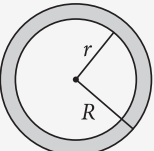
Funkcja kwadratowa

Wzór funkcji kwadratowej ($a \neq 0, x \in \mathbb{R}$):

- w postaci ogólnej: $f(x) = ax^2 + bx + c$,
- w postaci kanonicznej: $f(x) = a(x - p)^2 + q$, gdzie $p = -\frac{b}{2a}, q = -\frac{\Delta}{4a}, \Delta = b^2 - 4ac$,
- w postaci iloczynowej:
 - jeśli $\Delta = 0$, to $f(x) = a(x - x_0)^2$, gdzie $x_0 = -\frac{b}{2a}$ – miejsce zerowe funkcji,
 - jeśli $\Delta > 0$, to $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ – miejsca zerowe funkcji,
 - jeśli $\Delta < 0$, to nie można przedstawić wzoru funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej.

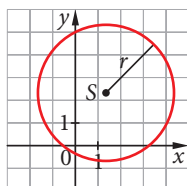
Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku w punkcie (p, q) . Ramiona paraboli skierowane są do góry, gdy $a > 0$, do dołu, gdy $a < 0$.

Okrąg i koło

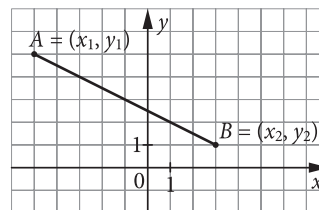
	Długość okręgu
	$L = 2\pi r$
	Pole koła
	$P = \pi r^2$
	Długość łuku okręgu
	$l = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ}$
	Pole wycinka koła
	$P = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ}$
	Pole pierścienia kołowego
	$P = \pi(R^2 - r^2)$

Równanie okręgu

Równanie okręgu o środku $S = (a, b)$ i promieniu r ma postać:
 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$



Długość odcinka. Środek odcinka



S – środek odcinka AB

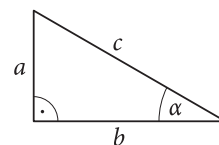
$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \quad S = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$



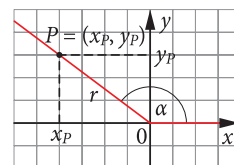
Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego

$r = |OP| = \sqrt{x_p^2 + y_p^2}$ – promień wodzący punktu P

$$\sin \alpha = \frac{y_p}{r}$$

$$\cos \alpha = \frac{x_p}{r}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_p}{x_p}, x_p \neq 0$$



Wartości funkcji trygonometrycznych dla wybranych kątów

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

Wybrane wzory redukcyjne

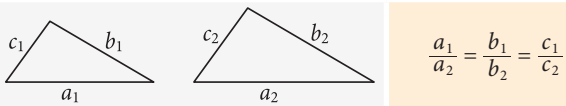
- $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$
- $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
- $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$
- $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$
- $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
- $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$
- $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$

Związki między funkcjami trygonometrycznymi ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$)

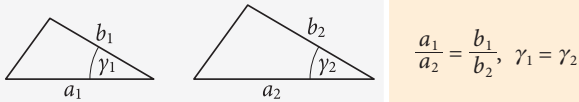
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \alpha \neq 90^\circ$
- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Cechy podobieństwa trójkątów

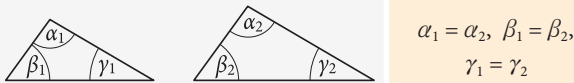
cecha bok-bok-bok



cecha bok-kąt-bok



cecha kąt-kąt-kąt



Pola powierzchni i objętości brył

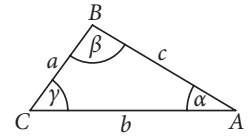
Bryła	Pole powierzchni	Objętość
	Gnaniostup	
	$P_c = P_b + 2P_p$	$V = P_p \cdot H$
	Prostopadłościan	
	$P_c = 2(ab + ac + bc)$	$V = abc$
	Sześcian	
	$P_c = 6a^2$	$V = a^3$
	Ostrosłup	
	$P_c = P_b + P_p$	$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H$
	Walec	
	$P_b = 2\pi rH$ $P_c = 2\pi r(r + H)$	$V = \pi r^2 H$
	Stożek	
	$P_b = \pi r l$ $P_c = \pi r(r + l)$	$V = \frac{1}{3} \pi r^2 H$
	Kula	
	$P = 4\pi R^2$	$V = \frac{4}{3} \pi R^3$

Twierdzenie cosinusów

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



Pole trójkąta i pola czworokątów

Figura	Pole
	Trójkąt
R – promień okręgu opisanego na trójkącie r – promień okręgu wpisanego w trójkąt	$P = \frac{1}{2} ah$ $P = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$ $P = \frac{abc}{4R}$ $P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$
	Kwadrat
	$P = a^2$ $P = \frac{1}{2} d^2$
	Równoległobok
	$P = ah$ $P = ab \sin \alpha$
	Romb
	$P = ah$ $P = \frac{ AC \cdot BD }{2}$ $P = a^2 \sin \alpha$
	Trapez
	$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$
	Deltoid
	$P = \frac{ AC \cdot BD }{2}$

Parametry statystyczne

- Średnia arytmetyczna n liczb x_1, x_2, \dots, x_n :
$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$
- Średnia ważona liczb x_1, x_2, \dots, x_n o nieujemnych wagach odpowiednio a_1, a_2, \dots, a_n :
$$\bar{x}_w = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$



I wiesz, jak zdać maturę

ZBIÓR ZADAŃ MATURALNYCH

ćwiczenie rozwiązywania zadań maturalnych oraz zadań CKE



VADEMECUM

powtarzanie wiadomości połączone z rozwiązywaniem zadań różnego typu



ARKUSZE MATURALNE

rozwiązywanie arkuszy maturalnych dopasowanych do matury

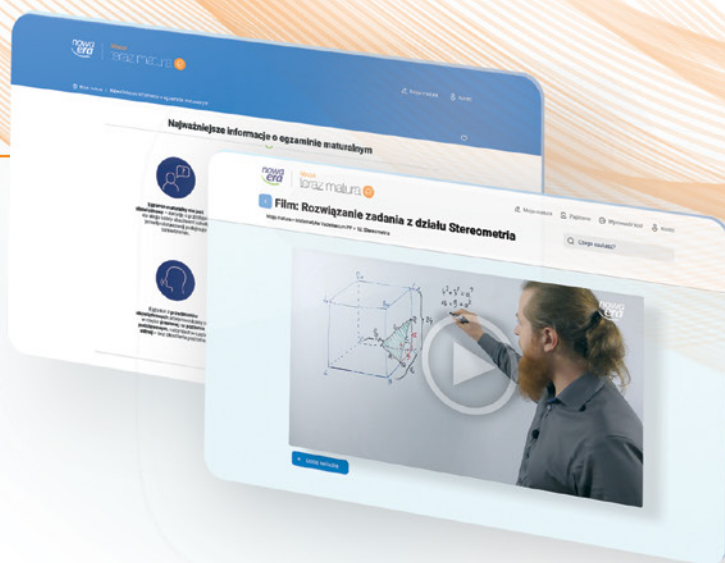
CYFROWE WSPOMAGANIE NAUKI

- **APLIKACJA** – materiały cyfrowe zintegrowane z Vademecum, Zbiorem zadań maturalnych i Arkuszami maturalnymi, ułatwiające przygotowania do egzaminu

app.nowaterazmatura.pl

- **SERWIS MATURALNY** – wszystkie niezbędne informacje o maturze

nowaterazmatura.pl



Nowa Era Sp. z o.o.

www.nowaera.pl nowaera@nowaera.pl

Centrum Kontakt: 58 721 48 00

ISBN 978-83-267-5299-5



9 788326 752995